

E/ Suite de fonctions1/ Convergence simple et uniforme

Définition 1: Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur $I \subset \mathbb{R}$

On dit que (f_n) converge simplement vers f sur I si et si

$\forall x \in I$: x fixé : la suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$

càd $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in I \quad \exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Définition 2: On dit que (f_n) converge uniformément vers f sur I

si et si : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad \forall x \in I \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

càd : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad \lambda_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

càd $\lambda_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

2/ Propriétés

P1: Si il existe une suite (u_n) convergente vers 0 telle que :

$\forall x \in I : |f_n(x) - f(x)| < a_n$ alors f_n c.u vers f sur I

P2: Si (f_n) c.u vers f sur I alors (f_n) c.s vers f sur I

la réciproque est fausse

Exemple: $f_n(x) = \frac{x\sqrt{n}}{1+nx^2}$ (f_n) c.s vers $f=0$ sur \mathbb{R}

et $f'_n(x) = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$ d'où $\lambda_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2}$ ne

converge pas vers 0 donc (f_n) ne converge pas unif^t vers $f=0$ sur \mathbb{R}

3/ Critère de Cauchy de la convergence uniforme

(f_n) c.u sur $I \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N ; \forall m > N$

$\forall x \in I : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

4/ Continuité de la limite uniforme

Si (f_n) c.u vers f sur I et f_n continue sur I alors f est continue sur I

càd $\forall x_0 \in I : \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right)$

Remarque: Si f_n continue sur I et (f_n) c.s vers f sur I et f non continue sur I alors (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur I

5/ Integration d'une limite uniforme

Si (f_n) c.u. vers f sur $[a, b]$ et f_n continue sur $[a, b]$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

6/ Limite d'une suite de fonctions dérivables

Si (f_n) dérivable sur $[a, b]$ et f_n c.s. vers f sur $[a, b]$ et si (f'_n) converge uniformément vers g sur $[a, b]$ alors (f_n) c.u. vers f sur $[a, b]$ et f est dérivable sur $[a, b]$ telle que $f' = g$

car $f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x)$ soit encore $\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x)$

II/ Series de fonctions

1/ Convergence simple et uniforme (c.s. et s.u.)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I

On pose $S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x)$

On dit que la série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge simplement (uniformement) vers $f(x)$ sur I si et si la suite (S_n) converge simplement (uniformement) vers f sur I et on écrit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

2/ Convergence absolue (CA)

On dit que la série $\sum f_n(x)$ converge absolument sur I si et si la série $\sum |f_n(x)|$ converge simplement sur I

3/ Propriété :

la série $\sum f_n(x)$ c.u. sur $I \Leftrightarrow$ le reste $R_n(x) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} f_p(x)$ c.u. vers 0 sur I
car $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}^* : \forall x \in I \forall n > N : |R_n(x)| < \varepsilon$

4/ Convergence normale (CN)

la série $\sum f_n(x)$ converge normalement sur I si et si \exists une suite (u_n) à termes positives telle que $\forall x \in I : |f_n(x)| \leq u_n$ et $\sum u_n$ c.v

5/ Propriétés :

$$\begin{array}{l} CN \Rightarrow CA \Rightarrow C.S \\ \quad \quad \quad \Rightarrow C.U \Rightarrow C.S \end{array}$$

Les implications réciproques sont en général fausses

6/ Critères de convergence simple ... Cours

Pour chaque x fixé de I , $f_n(x)$ est le terme général d'une suite numérique, on peut ainsi utiliser les critères de convergence vus précédemment (critère d'Alémbert, Cauchy, Abel ...)

7/ Continuité de la somme

Si f_n continue sur I et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ c.u. vers f sur I
alors f est continue sur I

8/ Inversion Limite-Somme

Soit (f_n) suite de fonctions continues sur $[a, b]$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = U_n$
Si $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ c.u. sur $[a, b]$ alors $\sum U_n$ c.v. et
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right)$$

9/ Intégration de la somme

Si f_n continue sur $[a, b]$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ c.u. sur $[a, b]$ vers f
alors f est continue sur $[a, b]$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) dx$

1/ Dérivation de la somme

(f_n) dérivables (de classe C^1) sur $[a, b]$ telles que:

i/ $\exists x_0 \in [a, b]$ telle que $\sum f_n(x_0)$ c.v.

ii/ la série $\sum f'_n(x)$ c.u. sur $[a, b]$ alors $\sum f_n(x)$ c.u. sur

$[a, b]$ vers f alors f est dérivable (de classe C^1) sur $[a, b]$ et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$$

2 Règle d'Abel pour les séries de fonctions:

Soit $f_n(x) = a_n(x) \cdot b_n(x)$ définies sur I • Si

i/ $\forall x \in I : a_n(x) > 0$; $a_n(x)$ décroissante, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n(x) = 0$

ii/ $\left| \sum_{k=0}^n b_k(x) \right| \leq M$ alors la série $\sum f_n(x)$ c.u. sur I



ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Chimie
Diapo
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..